TEMA 10: ARITMÉTICA DEL COMPUTADOR

- Los ordenadores trabajan con 0 y 1, cifras binarias.
- 2 estados posibles
  - Con 2 bits = 4 estados → 2^2
  - Con 3 bits = 8 estados → 2^3
  - Con 4 bits = 16 estados → 2^4
  - Con n cifras = 2^n estados

SISTEMAS NUMÉRICOS

Propiedades

- Un sist. numérico es todo aquello q' nos sirve p' CONTAR.
- Todos los nº se pueden representar mediante sucesiones de símbolos → 0, 1, 2, 3 ...
  punto raíz → "." separa parte entera de la decimal
  signo + o - → positivo o negativo
- El sistema decimal es posicional: c/cifra tiene determinado peso según el lugar donde esté
  - No es lo mismo 10 que 1.000.000
  - El mismo dígito, 1, dependiendo de la posición tiene ≠ valor
- El sist. romano no es posicional

Binario
Octal
Hexadecimal

} tb. son posicionales

16 8 4 2 1 ← Valor posiø

○ ● ● ○ ○

1 0 0 1 1 ← Dígitos binarios

○ ON
● OFF

↘ Nº 19 → Sumar todos los ON
$16+2+1=19$

CONVERSIÓN DECIMAL A BASE B

Un nº tiene una única expresiø en una base dada en forma de números, de representantes.

- Conversión decimal a base b

METODO DE LAS DIVISIONES SUCESIVAS

- Dividir el nº n entre b → base escogida
- d_0 = resto de dividir n entre b
- d_1 = resto de dividir n_1 entre b (n_1 = cociente de divisiø anterior)

Ya tengo un algoritmo

d_i = resto de dividir n_i entre b
Paro cdo el cociente es 0

Ejemplo: Convertir 49 a base 2

$49/2 = 24$ resto 1
$24/2 = 12$ resto 0
$12/2 = 6$ resto 0
$6/2 = 3$ resto 0
$3/2 = 1$ resto 1
$1/2 = 0$ resto 1 → $1 : 2 = 0$

$\frac{0}{1}$

De abajo a arriba 110001.
$49_{10} = 110001_2$

1775 convertir en base 2, 8 y 16

$1775/2 = 887$ resto 1
$887/2 = 443$ resto 1
$443/2 = 221$ resto 1
$221/2 = 110$ resto 1
$110/2 = 55$ 0
$55/2 = 27$ 1
$27/2 = 13$ 1
$13/2 = 6$ 1
$6/2 = 3$ 0
$3/2 = 1$ 1
$1/2 = 0$ 1

base 2: 11011101111_2

$1775/8 = 221$ resto 7
$221/8 = 27$ 5
$27/8 = 3$ 3
$3/8 = 0$ 3

$3 : 8 = 0$

$\frac{0}{3}$

base 8: 3357_8

10 A
11 B
12 C
13 D
14 E
15 F

$1775/16 = 110$ 15 = F
$110/16 = 6$ 14 = E
$6/16 = 0$ 6

base 16: $6EF_{16}$

MÉTODO DE LAS MULTIPLICACIONES SUCESIVAS

- Sea n la parte decimal de un nº del sist. decimal
- Multiplicar n por base
- Coger parte NO decimal
- La parte decimal se multiplica x base
- Paramos cdo mult. da 0

Ejemplo: Convertir 0,375 en base 2

$0,375 \cdot 2 = 0,75$ parte entera 0
$0,75 \cdot 2 = 1,5$ 1
$0,5 \cdot 2 = 1,0$ 1
$0,0 \cdot 2 = 0$

$0,375_{10} = 0,011_2$

Convertir 0,8125 en base 2

$0,8125 \cdot 2 = 1,625$ parte entera 1
$0,625 \cdot 2 = 1,25$ 1
$0,25 \cdot 2 = 0,5$ 0
$0,5 \cdot 2 = 1,0$ 1
$0,0 \quad 2 = 0$

$0,1101_2$

Convertir 0,8125 en base 8

$0{,}8125 \cdot 8 = 6{,}5$	6	$0{,}64_8$
$0{,}5 \cdot 8 = 4{,}0$	4	
$0{,}0 \cdot 8 = 0$		

0,8125 en base 16

10
11
12
13
E 14
F 15

$0{,}8125 \cdot 16 = 13{,}0$	$13 = D$	$0{,}D_{16}$
$0{,}0 \cdot 16 = 0$		

Convertir 0,6 en base 2

$0{,}6 \cdot 2 = 1{,}2$	1
$0{,}2 \cdot 2 = 0{,}4$	0
$0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8$	0
$0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6$	1
$0{,}6 \cdot 2 = 1{,}2$ → SE REPITE	

$0{,}\overline{1001}_2$

Es periódico en base 2

0,38 en base 2

$0{,}38 \cdot 2 = 0{,}76$	0
$0{,}76 \cdot 2 = 1{,}52$	1
$0{,}52 \cdot 2 = 1{,}04$	1
$0{,}04 \cdot 2 = 0{,}08$	0
$0{,}08 \cdot 2 = 0{,}16$	0
$0{,}16 \cdot 2 = 0{,}32$	0
$0{,}32 \cdot 2 = 0{,}64$	0
$0{,}64 \cdot 2 = 1{,}28$	1
$0{,}28 \cdot 2 = 0{,}56$	

0,01100001010001111010111000010100

Una expres fácil en base 10 puede ser muy difícil en base 2

OPERACIONES

Sumar en base 2

$$\begin{array}{r} 0,1001 \\ +\ 0,1001 \\ \hline 1,0010 \end{array}$$

1 → acarreo

$$\begin{array}{r} 1 \\ +\ 1 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +\ 0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +\ 1 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +\ 0 \\ \hline 1 \end{array}$$

BINARIO A DECIMAL

Ejemplo: 1 0 1 0 , 1 0

Exponentes de dcha a izq

$$2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0 \quad 2^{-1}\ 2^{-2}$$

$$8+4+2+1 \quad 0,5\ 0,25$$

$$\underbrace{8+0+2+0}_{10} \ , \ \underbrace{0,5+0}_{0,5}$$

Anotar base = 2
Calcular
Multiplicar x binario
Sumar = 10

$$(10,5)_{10} = (1010,10)_2$$

→ Para comprobar el ejercicio

$$0,\ 1\ 0\ 0\ 1$$

$$2^0\ 2^{-1}\ 2^{-2}\ 2^{-3}\ 2^{-4}$$

$$1\ \ 0,5\ \ 0,25\ \ 0,125\ \ 0,0625$$

$$\underbrace{0,\ 0,5\ \ 0\ \ 0\ \ 0,0625}$$

$$0, \ +\ 0,5625 = 0,5625$$

$$\begin{array}{r} 0,5625 \\ +\ 0,5625 \\ \hline 1,125 \end{array}$$

1,125 = 1

0,125 · 2 = 0,25 → 0

0,25 · 2 = 0,5 → 0

0,5 · 2 = 1,0 → 1

0,0 · 2 = 0

1,001

Multiplicar en base 8

Para los números del 1 al 8 es igual que en decimal:

$$\begin{array}{r} 12 \cdot 3 \\ \hline 36 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 22 \cdot 2 \\ \hline 44 \end{array}$$

Cuando hay números mayores a 8:

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 12 \cdot 6 \\ \hline 74 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 6 \cdot 2 = 12 \text{ es mayor que } 8 \\ 6 \cdot 1 = 6 + 1 = 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ -\ 8 \\ \hline 4 \end{array} \to 1 \text{ vez resto}$$

↳ acarreo

El acarreo se SUMA __DESPUÉS__ de multiplicar

$$\begin{array}{r} {}^{1}\ \ \ \ \\ 53 \cdot 2 = \\ \hline 126 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ -\ 8 \\ \hline 2 \end{array} \to 1$$

acarreo positivo de la sgte columna

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1\,1} \ \ \ \\ 777 \cdot 2 \\ \hline 1776 \end{array} \qquad 7 \cdot 2 = 14 \qquad \begin{array}{r} 14 \\ -\ 8 \\ \hline 6 \end{array} \to 1 \qquad \begin{array}{r} 15 \\ -\ 8 \\ \hline 7 \end{array} \to 1$$

$$\begin{array}{r} {}^{1}\ \ \ \ \ \ \\ 232 \cdot 13 \\ \hline {}^{1}\ 716 \\ +\ 232\ \ \\ \hline 3236 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \cdot 3 = 9 \\ -\ 8 \\ \hline 1 \end{array} \to 1 \qquad \begin{array}{r} 7 + 3 = 10 \\ -\ 8 \\ \hline 2 \end{array}$$

Base 8 → TABLA

BASE 8	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6				
3	0							
4	0							
5	0							
6	0							
7	0							

$2 \cdot 4 = 8$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,2\,2} \\ 577 \cdot 32 \\ \hline 1376 \\ +\ 2175 \\ \hline 23346 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ -8 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 \\ -8 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ -8 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 21 \\ -8 \to 1 \\ \hline 13 \\ -8 \to 1 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 23 \\ -8 - 1 \\ \hline 15 \\ -8 - 1 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \\ -8 - 1 \\ \hline 9 \\ -8 - 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ -8 - 1 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ -8 - 1 \\ \hline 3 \end{array}$$

CONVERSIONES DE BASE

Primer metodo

Convertir -11101.101_2 a base 8

Primero lo paso a base 10

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1. & 1 & 0 & 1 \\ 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0. & 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} \\ 16 & 8 & 4 & 0 & 1. & 0{,}5 & 0 & 0{,}125 \end{array}$$

$29 \quad . \quad 0{,}625$

$-29{,}625_{10}$

Ahora lo paso a base 8 $\quad -29{,}625$

Reservo el signo negativo $-$

Parte entera, divis sucesiva hasta el cociente de 0

$29/8 = 3$ resto 5 $\quad -35_8$

$3/8 = 0$ resto 3

$-35{,}5_8$

Parte decimal, mult. sucesivas

$0{,}625 \cdot 8 = 5{,}0$ parte entera 5 $\quad$ 5

$0{,}0 \cdot 8 = 0$

Segundo método

Divides y mult. sucesivas, pero operando en base 1

Hago el mismo algoritmo, divides y mult., pero las operaciones las hago en base 2.

$-101110{,}1_2$ en base 8

$0:0=0$
$0:1=0$
$1:0=0$
$1:1=1$

Divido la parte entera en 8, pero 8 en binario

$8/2=4 \quad 0$
$4/2=2 \quad 0$
$2/2=1 \quad 0$
$1/2=0 \quad 1$

1000

$$\begin{array}{r|l} 101110 & 1000 \\ -1000 & 101 \rightarrow \text{entero} \\ \hline 001110 & \\ -1000 & \\ \hline 0110 \rightarrow \text{resto} & \end{array}$$

Sigo dividiendo hasta que me de 0

$101 \,\underline{|1000}$

$$\begin{array}{r|l} 101 & 1000 \\ \hline -000 & 0 \rightarrow \text{cocien} \\ 101 \rightarrow \text{resto} & \end{array}$$

Entonces tengo:

$101110 / 1000 = 101$ resto 110 $\uparrow$ $\quad 110_2 = 6_8$

$101 / 1000 = 0$ resto 101 $\downarrow$ $\quad 101_2 = 5_8$

La parte decimal la multiplico por 1000

$0{,}1 \cdot 1000 = 100{,}0 \qquad 100_2 = 4_8$

$0{,}0 \cdot 1000 = 0$

El numero es $-101110{,}1_2 = -56{,}4_8$

Tercer metodo

Aplicable solo cuando una base sea potencia de la otra base

$$b_2 = b_1^K$$

Realizamos agrupaciones de K elementos, añadiendo ceros si es necesario

$-101110{,}1_2$ en base 8 $\qquad$ 8 es $2^3 \rightarrow$ agrupamientos de 3 elementos

Construimos tabla de base a la que queremos llegar

Agrupamos de a 3 elementos

- 101 110 , 100
- 5 6 , 4

- 56,4

dec.	$B_1 = 2$	$B_2 = 8$
0	000	0
1	001	1
2	010	2
3	011	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7

REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS

Punto fijo

Tendrá un nº fijo n_1 de lugares enteros y un nº fijo n_2 de decimales

Ejemplo:

$n_1 = 5$ y $n_2 = 3$ → tengo 5 lugares para enteros y 3 p/ los decimales

· Representar 1525,33

1525 | 33 ← se separan con una barra

Representar 1525,33578 ← No cabe, tengo que truncar

1525 | 335 → el 78 no caben

Punto flotante

$x = a \cdot b^t$

b = base
t = exponente (característica)
a = mantisa

Ejemplo: Representar 1525,33 en punto flotante

1525,33 es lo mismo que:

1525,33 × 10.000 ← 4 ceros porque 1525 son 4 dígitos
$0,152533 \times 10^4$

Tambien se podría escribir

$0,0152533 \cdot 10^5$
$0,00152533 \cdot 10^6$

Si $b^{-1} < |a| < 1$ = NORMALIZADA

Cuando no hay 0 dp. de la coma
$0,152533 \cdot 10^4$

ERRORES

De redondeo

$1534,23 = 0,153423 \cdot 10^4$

mantisa = 4 ; característica = 2

El numero sera: $0,1534 \cdot 10^4$

$0,19876432 \cdot 10^5$

mantisa = 4 → 0,1988
mantisa = 5 → 0,19876
mantisa = 2 → 0,20

Truncamiento

$1534,23 = 0,153423 \cdot 10^4$

mantisa = 4 caract. = 2

$0,1534 \cdot 10^4$

$0,19876432 \cdot 10^5$

m = 4 0,1987
m = 5 0,19876
m = 2 0,19

Overflow

$x = 15,4328 \cdot 10^{99}$

mantisa = 4 ; caract. = 2

$fl(x) = 0,154328 \cdot 10^{101}$ ← demasiado grande, solo tengo 2 p' la característica. = OVERFLOW

Underflow

$x = 0,0154328 \cdot 10^{-99}$

mantisa = 4 ; caract. = 2

$fl(x) = 0,154328 \cdot 10^{-100}$ → demasiado pequeño p' el ordenador.

DIGITOS SIGNIFICATIVOS

Cdo tengo ea aproximad de un numero puedo decir con cuántos dígitos significativos se acerca, que es el m entero más grande no negativo para el cual se cumple que

$$\left| \frac{p^* - p}{p} \right| \leq 5.0 \cdot 10^{-m}$$

Ejemplo:

$p = 1/3$; $p^* = 0,33333$ Calcular cifras significativas del error

Error absoluto: $|p - p^*| = 3,3333 \cdot 10^{-6}$

Error relativo: $\frac{|p - p^*|}{p} = 9,9999 \cdot 10^{-6}$

$\frac{|p - p^*|}{p} \leq 5 \cdot 10^{-m}$ tengo que calcular m

lo puedo escribir de otra forma

$0,99999 \cdot 10^{-5} \leq 5 \cdot 10^{-m} \rightarrow m = 5$

5 cifras significativas

REPRESENTACIONES INTERNAS

- MAGNITUD-SIGNO

1er bit izq. = 0 → nº positivo
1er bit izq. = 1 → nº negativo

Escribir −23 y 23 en magnitud-signo con 8 bits

Pasar a binario: $23_{10} = 10111_2$
Relleno con ceros, si me piden 8 bits
23 = 00010111
−23 = 10010111

• NOTACIÓN EN EXCESO Al revés de magnitud - signo

1^{er} bit izq. 1 = positivo
1^{er} bit. izq. 0 = negativo

Escribir N como el equivalente binario del numero $N + 2^{p-1}$ denominado característica de N con p bits

Ej. Escribir 23 y -23 en notació en exceso con 8 bits

Ahora no tengo que escribir 23 en binario, sino $23+2^{8-1}$

$23 + 2^7 = 23 + 128 = 151$ → el 151 es el que paso a base 2

151/2 = 75	1	
75/2 = 37	1	
37/2 = 18	1	$10010111_2 = 23$
18/2 = 9	0	
9/2 = 4	1	
4/2 = 2	0	
2/2 = 1	0	
1/2 = 0	1	

$-23+2^7 = -23 + 128 = 105$

signo negat.
↓

105/2 = 52	1	
52/2 = 26	0	$01101001_2 = -23$
26/2 = 13	0	1101001_2
13/2 = 6	1	
6/2 = 3	0	
3/2 = 1	1	
1/2 = 0	1	

- COMPLEMENTO A DOS

P' compl. a 2 necesito compl. a 1.
Complemento a 1 de un nº binario es cambiar 0 x 1 y 1 x 0
Complemento a 2: sumar 1 al complemento a 1

Positivo: equivalente en binario
Negativo: complemento a 2 de su modulo

Ej. 23 en complemento a 2 con 8 bits

23/2 =	11	1
11/2 =	5	1
5/2 =	2	1
2/2 =	1	0
1/2 =	0	1

$10111_2 = 23$ $\xrightarrow{8 \text{ bits}}$ 00010111_2

↓

Complemento 1

11101000

↓

Complemento 2 = sumar 1

$$\begin{array}{r} 11101000 \\ + \quad\quad\quad 1 \\ \hline 11101001_2 \end{array} \rightarrow -23$$

sumar a 1 el compl. a 2 del nº positivo

• PUNTO FLOTANTE (REALES)

Cdo hablamos de nºs reales, la representación q̇ seguimos es en pto flotante: exponencial, normalizada y codificar 3 campos:

- Signo → 0 positivo → 1 negativo
- Exponente: notación en exceso
- Mantisa: equivalente en binario directo

Ej. Con 32 bits el 205,3125 en pto flotante

El signo será 1 → positivo
Exponente → hay que normalizar: $(0,2053125 \cdot 10^3)$ → no sale en ptos ¿? lo calculé yo

$205,3125 = 11001101,0101 = 0,110011010101 \cdot 2^{+8}$

$8 + 2^{7-1} = 8 + 64 = 72 = 1001000$

0 | 100 1000 | 110011010101000000000000

signo (1) exponente (7) mantisa (24)

Aritmética del punto flotante

Suma, Resta, Mult., División } Flotante de 1 nº, flotante del otro se suma (resta, mult. o div.) y se aplica flotante otra vez

SUMA: $x + y = fl.(fl.(x) + fl(y))$

RESTA: $x - y = fl(fl(x) - fl(y))$

MULTIPLICAØ: $x \cdot y = fl(fl(x) \cdot fl(y))$

DIVISIÓN: $x / y = fl(fl(x) / fl(y))$

Propiedades

$x + y = x \longrightarrow$ Puede que $y \neq 0$

$x + (y + z) =$ ó $\neq (x + y) + z$

$x \cdot (y + z) =$ ó $\neq (xy) + (xz)$